LEKCIJE IZ MATEMATIKE 2

Ivica Gusić

Lekcija 13

Obične diferencijalne jednadžbe 2. reda

Lekcije iz Matematike 2.

13. Obične diferencijalne jednadžbe 2.reda.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se sustavno rješavaju obične linearne diferencijalne jednadžbe 2. reda s konstantnim koeficijentima i komentira njihova uloga u primjenama. Posebno se podsjeća na diferencijalne jednadžbe gibanja po pravcu pri djelovanju stalne sile (vertikalni hitac) i titranja (gibanje po pravcu uz djelovanje sile usmjerene prema ishodištu i po intezitetu proporcionalne udaljenosti od ishodiŽta). Pojam 2.*reda* odnosi se na to da se pojavljuju druge derivacije, ali ne derivacije 3. ili višeg reda.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Ako imamo dvije zavisne varijable, recimo x, y, onda je temeljni problem odredjivanje analitičke veze medju njima. U prirodnim znanostima i u inženjerstvu, tom se problemu pristupa eksperimentalno. Često se iz eksperimentalnih podataka ne može naslutiti izravna veza medju tim veličinama, ali se može naslutiti veza izmedju x, y, y' i y'' gdje je y' brzina promjene veličine y s obzirom na promjenu veličine x, dakle $y' := \frac{dy}{dx}$, a y'' akceleracija te promjene, , dakle $y'' := \frac{d^2y}{dx^2}$. Ako razmatramo vremenski proces onda obično imamo varijable t (za vrijeme) i y ili x (za položaj, količinu i sl.). Tada je $y' := \frac{dy}{dt}$ itd.

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati pojam derivacije prvog i drugog reda i pojam neodredjenog integrala. Takodjer je potrebno poznavati fizikalnu interpretaciju prve derivacije kao brzine i druge derivacije kao akceleracije te vezu sile i akceleracije. Dakle, ako su dvije veličine x, y povezane relacijom $y = f(x)$, onda se brzina promjene veličine y s obzirom na promjenu veličine x opisuje derivacijom $f'(x)$ funkcije f po x, tj. s $\frac{df}{dx}$; što se zapisuje kratko i kao y', odnosno $\frac{dy}{dx}$, dok se akceleracija (ubrzanje) te promjene opisuje drugom derivacijom $f''(x)$ funkcije f po x, tj. s $\frac{d^2f}{dx^2}$; što se se zapisuje kratko i kao y'', odnosno $\frac{d^2y}{dx^2}$. Dalje, sila je proporcionalna akceleraciji (keoficijent proporcionalnosti je masa).

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Pojam obične diferencijalne jednadžbe 2. reda.
Pojam smo djelomično upoznali u 2. lekciji. Polazi se od dviju zavisnih veličina

x, y brzine od y s obzirom na x, tj. $y' := \frac{dy}{dx}$ te akceleracije od y s obzirom na x, tj. $y'' := \frac{d^2y}{dx^2}$.
Umjesto x, y često se, pri vremenskim procesima, koriste oznake t, y, y', y'', gdje je $y' := \frac{dy}{dt}$ i $y'' := \frac{d^2y}{dt^2}$. (takodjer t, x, x', x'' i sl.).
Obična diferencijalna jednadžba 2.reda je analitička veza izmedju x, y, y' i y''.

Primjer 1. - nekoliko običnih diferencijalnih jednadžba 2.reda.
(i) $y'' = a$
(ii) $y'' + \omega^2 y = 0$
(iii) $y'' + py' + qy = 0$
(iv) $y'' + py' + qy = g(x)$
(v) $y'' - 3(x^2+1)y' + xy = e^x$.
(vi) $y''^2 y - x \sin y + e^{y'} = 0$.
(vii) $2yy'' = 1$.
Napomenimo da je (i) diferencijalna jednadžba gibanja po pravcu pri djelovanju stalne sile, (ii) titranja, (iii) i (iv) su opća homogena odnosno nehomogena linearna diferencijalna jednadžba 2.reda s konstantnim koeficijentima (i mnoge od njih imaju jasna fizikalna značenja), a (v), (vi) i (vii) nemaju jasna fizikalna značenja. Uočite da se u jednadžbama ne mora pojaviti ni x ni y ni y', ali y'' mora.

Riješiti diferencijalnu jednadžbu 2.reda znači iz jednadžbe eliminirati derivacije y' i y'' tako da ostanu samo x i y (što nam i treba jer tražimo vezu izmedju njih).

Primjer 2. Riješimo diferencijalnu jednadžbu $y'' = a$.
Rješenje provodimo uzastopnim integriranjem, tj. da najprije odredimo y' potom y. Neka je varijabla po kojoj se derivira t.

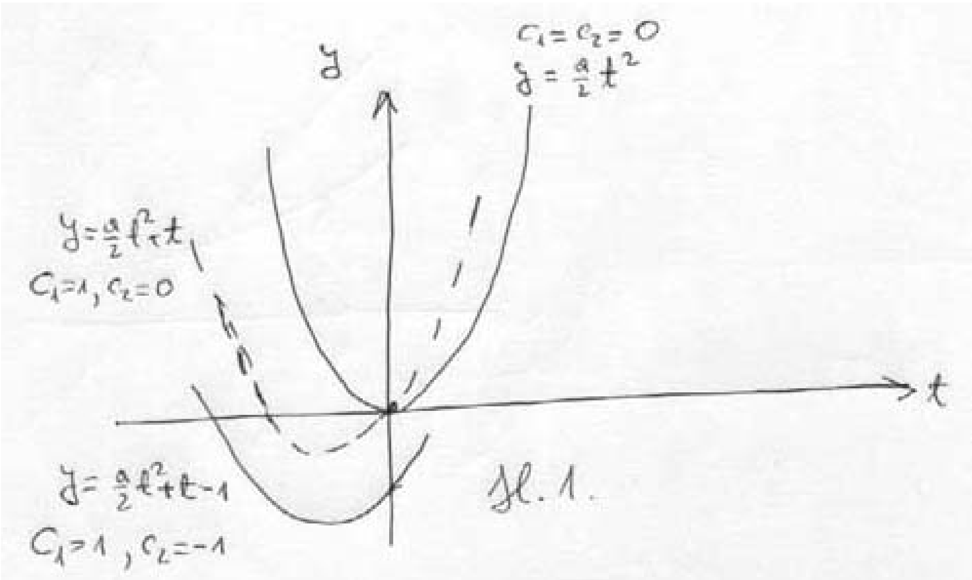
1.korak. Integriranjem jednadžbe $y'' = a$ dobijemo $y' = at + C_1$, za neodredjenu realnu konstantu C_1.
2. korak. Integriranjem jednadžbe $y' = at + C_1$ dobijemo

$$y = \frac{a}{2}t^2 + C_1 t + C_2$$

za neodredjenu realnu konstantu C_2. To je opće rjeŽenje početne diferencijalne jednadžbe.

Uočimo dvije neodredjene konstante C_1, C_2 u općem rješenju, koje možemo birati po volji. Tako je općenito za rješenje svake obične diferencijalne jednadžbe 2. reda (za one 1. reda je jedna konstanta, trećeg reda tri konstante itd.).

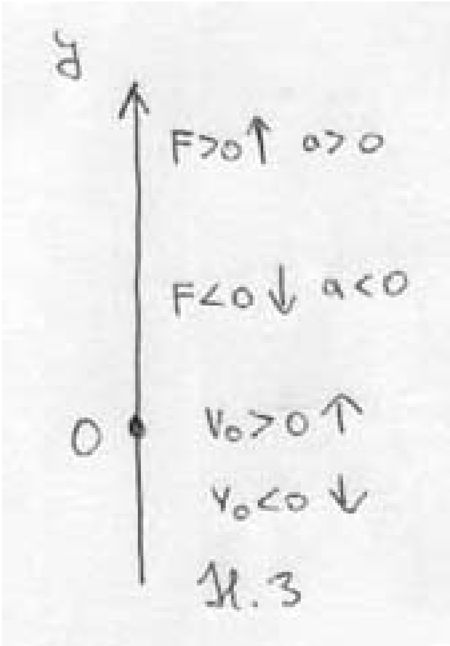
Partikularno rješenje je svako konkretno rješenje, tj rješenje u kojemu je specificirano C. Na primjer,
$y = \frac{a}{2}t^2$, $y = \frac{a}{2}t^2 + t$, $y = \frac{a}{2}t^2 + t - 1$ su partikularna rješenja (dobiju se, redom, za $C_1 = C_2 = 0$, $C_1 = 1,\ C_2 = 0$, $C_1 = 1,\ C_2 = -1$) (sl.1.).



Cauchyev problem drugog reda. To je sustav diferencijalne jednadžbe drugog reda i dvaju početnih uvjeta, tj. vrijednosti veličina y i y' za $x = 0$ ili za neku drugu konkretnu vrijednost veličine x, dakle:
$y(x_0) = y_0$.
$y'(x_0) = v_0$.
Cauchyev problem ima **jedinstveno** rješenje. Naime, iz početnih uvjeta možemo odrediti konstante C_1, C_2. To ćemo ilustrirati primjerom povezanim s predhodnim.

Primjer 3. Riješimo Cauchyev problem:
$y'' = a$.
$y(0) = y_0$.
$y'(0) = v_0$.
Vidjeli smo da je opće rješenje $y = \frac{a}{2}t^2 + C_1 t + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.
Zato je $y' = at + C_1$.
Uvrštavajući početni uvjet $y(0) = y_0$ u izraz za y, dobijemo:
$y_0 = \frac{a}{2} \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2$, dakle $C_2 = y_0$.
Uvrštavajući početni uvjet $y'(0) = v_0$ u izraz za y', dobijemo:
$v_0 = a \cdot 0 + C_1$, dakle $C_1 = v_0$,
pa je konačno rješenje (za y i za y')
$y = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + y_0$
$y' = at + v_0$.
Rješenje je predočeno slikom 2.

Fizikalna interpretacija Cauchyeva problema iz 3. primjera - gibanje po pravcu pri djelovanje stalne sile.
Na sl.3. je predočena y-os (pravac s uvedenim koordinatnim sustavom, s koordinatom y).

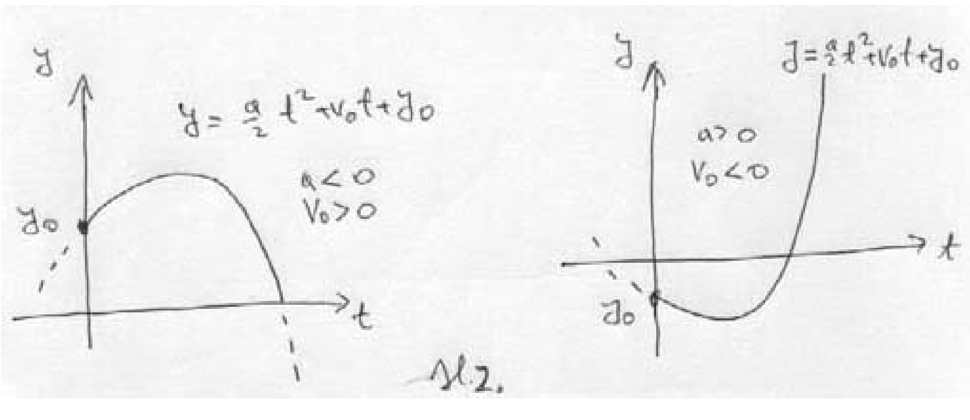


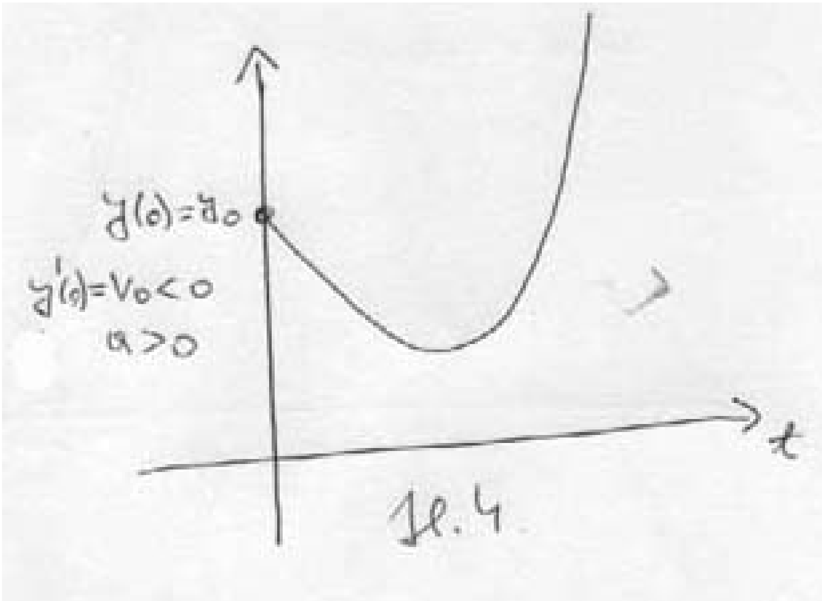
Uzduž pravca djeluje stalna sila koja uzrokuje stalnu akceleraciju a. Na pomenimo da, za $a > 0$ sila djeluje u pozitivnom smjeru (prema gore), a za $a < 0$ u negativnom smjeru (prema dolje), dok za $a = 0$ nema sile, pa je eventualno gibanje jednoliko (sa stalnom brzinom). Jednadžba:

$$y'' = a$$

je upravo diferencijalna jednadžba gibanja po pravcu uz djelovanje stalne sile. Iz nje ne možemo u potpunosti rekonstruirati gibanje (tj. položaj u svakom trenutku i brzinu u svakom trenutku). Medjutim to možemo iz početnih uvjeta. Naime (sl.4. i sl.2.):

$y(0) = y_0$ znači da se čestica koja se giba, u trenutku $t = 0$ nalazi u točki s koordinatom y_0.
$y'(0) = v_0$ znači da čestica koja se giba, u trenutku $t = 0$ ima brzinu v_0.





Općenito navedeni Cauchyev problem opisuje gibanje čestice po pravcu pod djelovanjem stalne sile s akceleracijom a, pri čemu čestica ima **početni položaj** y_0 i **početnu brzinu** v_0.
Napomenimo da smo u 2. lekciji obradili ovaj primjer za $a := -g$, što je matematički model za vertikalni hitac, tj. za gibanje u polju sile teže, uz zanemarivanje otpora zraka i pretpostavke o stalnosti gravitacije (u blizini površine zemlje). Tu je y_0 visina na kojoj se čestica nalazi u početku, a v_0 brzina kojom smo tu česticu izbacili u vis ili prema dolje.

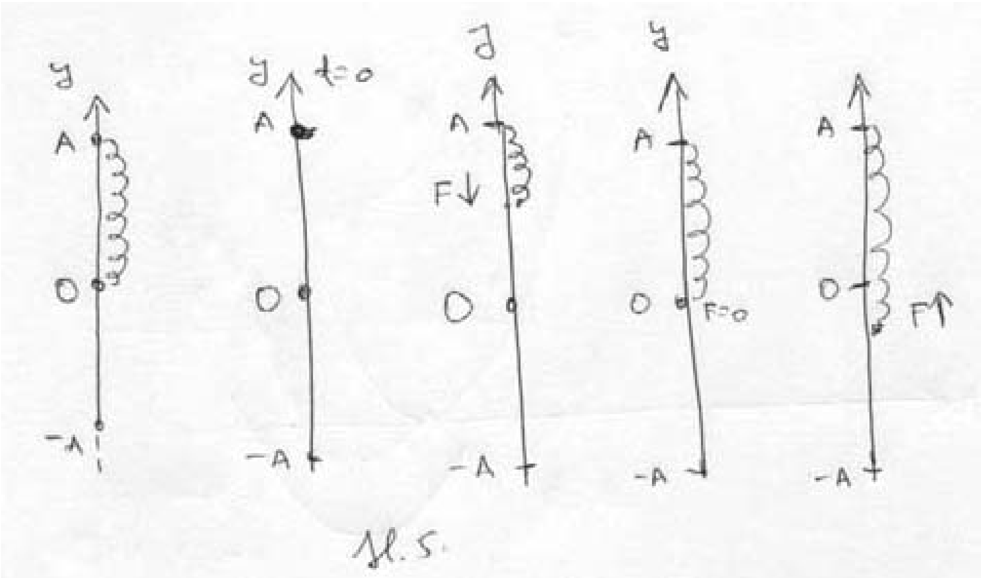
Obična linearna diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima jednadžba oblika

$$y'' + py' + qy = g(x)$$

gdje su p, q realni brojevi, a g funkcija. Ako je $g = 0$, jednadžba se zove **homogenom**, inače je **nehomogena**.

Na primjer, u 1. je primjeru:
(iv) takva nehomogena jednadžba,
u (iii) nehomogena,
(i) je, za $a \neq 0$ nehomogena (uz $p = q = 0$ i $g(x) = a$ za sve x),
(ii) je homogena uz $p = 0$ i $q = \omega^2$,
(v) je linearna, ali nije s konstantnim koeficijentima, a (vi) i (vii) nisu linearne.
Općenito ovakve diferencijalne jednadžbe fizikalno opisuju tzv. **prigušeni harmonijski oscilator**, što tu nećemo detaljno obrazlagati već dati tipičan primjer.

Primjer 4 - titranje na pravcu (sl.5.).



Cauchyev problem:
$y'' + \omega^2 y = 0$
$y(0) = A$, za pozitivnu konstantu A
$y'(0) = 0$
opisuje titranje po y osi izmedju točaka A i $-A$ (tj. s **amplitudom** A) **perioda** $\frac{2\pi}{\omega}$ tj. **frekvencije** $\frac{\omega}{2\pi}$). Zamišljamo da smo vrlo elastičnu oprugu stiskli u točku A, a onda je u $t = 0$ pustili da titra, te gledamo položaj $y(t)$ vrha opruge u vremenu t.
Vidjet ćemo da je rješenje problema $y = A\cos(\omega t)$.

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' + py' + qy = 0$.

1.korak - postavljanje i rješavanje karakteristične jednadžbe $r^2 + pr + q = 0$.
Na primjer, ako je $y'' - 7y' + 10y = 0$, onda je karakteristična jednadžba $r^2 - 7r + 10 = 0$, rješenja su $r_1 = 2$, $r_2 = 5$.

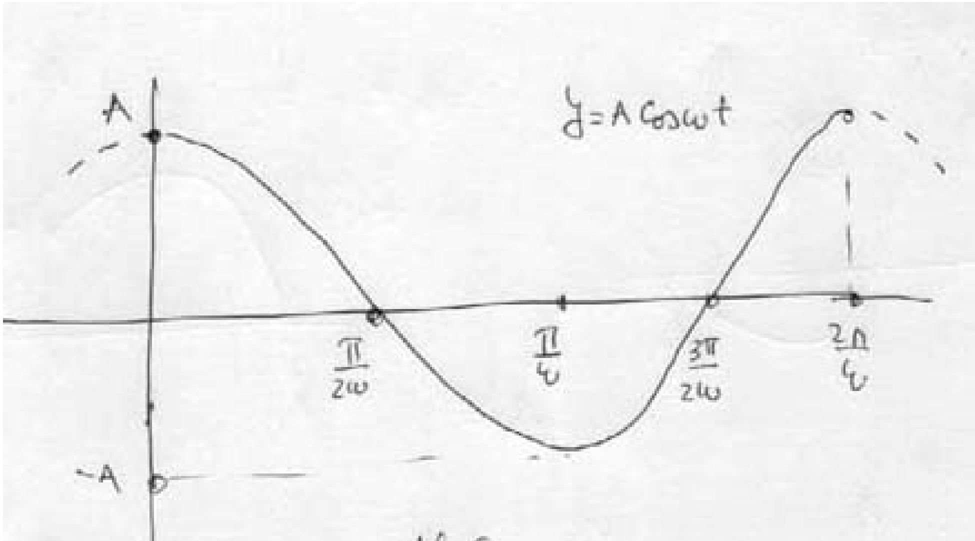
2.korak - ispisivanje općeg rješenja
$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.
U spomenutom je primjeru, dakle $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}$.

Primjer 5. - slučaj dvostrukog rješenja.
Ako je $r_1 = r_2 = r$, onda je opće rješenje $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$.
Tako je za $y'' - 4y' + 4y = 0$, $r_1 = r_2 = 2$, pa je opće rješenje $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.

Primjer 6. - slučaj kompleksno-konjugiranih rješenja.
Ako je $r = \alpha \pm \beta i$, onda je opće rješenje
$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)$.

Tako je za $y'' - 4y' + 7y = 0$, karakteristična jednadžba:
$r^2 - 4r + 7 = 0$, s rješenjima $r = 2 \pm \sqrt{3}i$, pa je opće rješenje:
$y = e^{2x}(C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x)$.

Primjer 7. - rješenje problema titranja.
$y'' + \omega^2 y = 0$
$r^2 + \omega^2 = 0$, tj. $r = \pm\omega i$, pa je $\alpha = 0$ i $\beta = \omega$. Zato je opće rješenje:
$y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$,
$y' = -\omega C_1 \sin(\omega t) + \omega C_2 \cos(\omega t)$.
Uvrštavanjem početnog uvjeta $y(0) = A$ u izraz za y, dobijemo:
$A = C_1 \cos(\omega \cdot 0) + C_2 \sin(\omega \cdot 0)$, tj. $A = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0$, tj. $A = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0$, tj. $C_1 = A$.
Slično, uvrštavanjem početnog uvjeta $y'(0) = 0$ u izraz za y', dobijemo:
$0 = -\omega C_1 \cdot 0 + \omega C_2 \cdot 1$, tj. $C_2 = 0$. Dakle, konačno je rješenje:
$y = A \cos(\omega t)$ (sl.6.).



Sl.6.